4. Nezávislé jevy, násobení pravděpodobností

JEVY A, B jsou NEZÁVISLÉ ⇔ $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

– pravděpodobnost jednoho jevu nezávisí na tom, zda druhý jev nastal či nenastal
– pokud jsou jevy A, B nezávislé, pak jsou také nezávislé jevy A, B'; A', B; A', B'
– pokud 3 a více jevů – složitější

Jevy A, B, C jsou nezávislé ⇔ $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ $\quad P(A \cap C) = P(A) \cdot P(C)$

$P(B \cap C) = P(B) \cdot P(C)$ a $P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$

Příklady

① Na výrobku se vyskytují 3 druhy vad, vada prvního druhu s pravděpodobností 0,1, vada druhého druhu s pravděpodobností 0,05 a vada třetího druhu s pravděpodobností 0,02. Jsou-li výskyty všech tří druhů nezávislé jevy, jaká je pravděpodobnost, že výrobek nezáv. jevy => lze užít násob. pravd.

a) má vady A, B
(1. a 2. druhu) $\quad P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = 0{,}1 \cdot 0{,}05 = \underline{0{,}005}$

b) má všechny 3 vady
(1. a 2. a 3. druhu) $\quad P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) = 0{,}1 \cdot 0{,}05 \cdot 0{,}02 = \underline{0{,}0001}$

c) má vady A, B a nemá vadu C $\quad C'$… nemá 3. vadu

$P(C') = 1 - P(C) = 1 - 0{,}02 = 0{,}98$

$P(A \cap B \cap C') = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C') = 0{,}1 \cdot 0{,}05 \cdot 0{,}98 = \underline{0{,}0049}$ $(4{,}9 \cdot 10^{-3})$

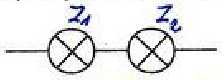
d) je bez vady, tj. nemá 1. vadu (A') a nemá 2. vadu (B') a nemá 3. vadu (C')

$P(A') = 1 - P(A) = 1 - 0{,}1 = 0{,}9 \quad P(B') = 1 - 0{,}05 = 0{,}95 \quad P(C') = 0{,}98$

$P(A' \cap B' \cap C') = P(A') \cdot P(B') \cdot P(C') = 0{,}9 \cdot 0{,}95 \cdot 0{,}98 \doteq \underline{0{,}84}$

② Obyčejná žárovka vydrží nepřetržitě svítit 1 500 hodin s pravděpodobností 85 %. S jakou pravděpodobností vydrží svítit

a) dvojice těchto žárovek zapojená sériově,

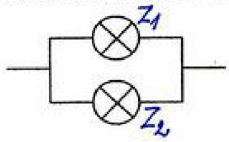


jev Z_1… svítí Z_1 $\quad$ jev Z_2… svítí Z_2 $\quad P(Z_1) = P(Z_2) = 0{,}85$

jev A… dvojice žárovek svítí, tj. svítí Z_1 a souč. Z_2 (nezávislé na sobě)

$P(A) = P(Z_1 \cap Z_2) = P(Z_1) \cdot P(Z_2) = 0{,}85 \cdot 0{,}85 = 0{,}7225 \doteq \underline{0{,}72}$ (72 %)

b) alespoň jedna ze dvojice těchto žárovek, pokud jsou zapojeny paralelně



1. pomocí sčítání pravděpodobností

jev Z_1… svítí Z_1 $\quad$ jev Z_2… svítí Z_2 $\quad P(Z_1) = P(Z_2) = 0{,}85$

jev B… svítí alespoň 1 z dvojice Z_1, Z_2, tj. svítí Z_1 nebo svítí Z_2 => $B = Z_1 \cup Z_2$

ALE jevy Z_1, Z_2 se navz. nevylučují – mohou svítit obě ($Z_1 \cap Z_2 \neq \emptyset$ neboť neprázdný průnik)

$P(B) = P(Z_1 \cup Z_2) = P(Z_1) + P(Z_2) - P(Z_1 \cap Z_2) = P(Z_1) + P(Z_2) - P(Z_1) \cdot P(Z_2)$

$P(B) = 0{,}85 + 0{,}85 - 0{,}85 \cdot 0{,}85 = 1{,}7 - 0{,}7225 = 0{,}9775 \doteq \underline{0{,}98}$ (98 %)

2. pomocí opačných (doplňkových jevů) – VÝHODNĚJŠÍ

jev B… svítí alespoň 1 ze dvojice Z_1, Z_2

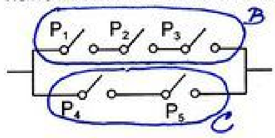
jev B'… nesvítí žádná ze dvojice, tj. nesvítí Z_1 a nesvítí Z_2

$P(Z_1') = 1 - P(Z_1) = 0{,}15$, obd. $P(Z_2') = 0{,}15$

$P(B) = 1 - P(B') = 1 - P(Z_1' \cap Z_2') = 1 - P(Z_1') \cdot P(Z_2') = 1 - 0{,}15 \cdot 0{,}15$

$P(B) = 1 - 0{,}0225 = 0{,}9775 \doteq \underline{0{,}98}$ (98 %)

③ Jaká je pravděpodobnost, že soustavou bude procházet proud, jestliže každý z 6 vypínačů dáme náhodně a nezávisle na ostatních buď do polohy zapnuto, nebo vypnuto (pravděpodobnost zapnuto?



jevy $A_1, \dots, A_5$ zapnul příslušný vypínač (nezáv. jevy)

$\Rightarrow P(A_1) = \dots = P(A_5) = \frac{1}{2}$ [zapnuto x vypnuto]

jev B … horní větví prochází el. proud, tj:
vyp. P_1 a P_2 a P_3 zapnuty $\quad B = A_1 \cap A_2 \cap A_3$

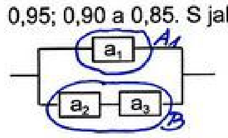
jev C … dolní větví proch. el. proud, tj:
vyp. P_4 a P_5 zapnuty $\quad C = A_4 \cap A_5$

jev A … soustavou proch. el. proud, tj: proud proch. aspoň 1 větví

$A = B \cup C \quad (B \cap C \neq \emptyset) \qquad P(A) = P(B) + P(C) - P(B \cap C)$

$P(A) = P(B) + P(C) - P(B) \cdot P(C) = \frac{1}{8} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{4} = \frac{4+8-1}{32} = \frac{11}{32}$

④ Zařízení se skládá z bloků a_1, a_2, a_3, které jsou nezávisle na sobě provozuschopné s pravděpodobností
DÚ 0,95; 0,90 a 0,85. S jakou pravděpodobností zařízení funguje?

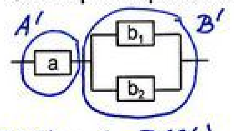


jev A … celé zařízení funguje (aspoň 1 větví proch. el. proud)

jevy A_1, B … příslušnou větví prochází el. proud

$P(A) = P(A_1 \cup B) = P(A_1) + P(B) - P(A_1)P(B) = P(A_1) + P(A_2 \cap A_3) -$
$- P(A_1) \cdot P(A_2 \cap A_3) = P(A_1) + P(A_2) \cdot P(A_3) - P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) =$
$= 0{,}95 + 0{,}90 \cdot 0{,}85 - 0{,}95 \cdot 0{,}90 \cdot 0{,}85 = 0{,}98825 \doteq 0{,}988$

⑤ Přerušení elektrického obvodu může nastat následkem poruchy členu a nebo obou členů b_1, b_2. Poruchy členů a, b_1, b_2 jsou nezávislé jevy A, B_1, B_2 s pravděpodobnostmi $P(A) = 0{,}03$, $P(B_1) = 0{,}2$, $P(B_2) = 0{,}2$. Určete pravděpodobnost přerušení obvodu.



A', B_1', B_2' … není porucha, tj. proud prochází členem

$P(A') = 0{,}97 \qquad P(B_1') = P(B_2') = 0{,}8$

C' … obvod celý nepřerušen $\qquad C$ … obvod přerušen

$P(C') = P(A' \cap B') = P(A') \cdot P(B') = P(A') \cdot P(B_1' \cup B_2') =$
$= P(A')[P(B_1') + P(B_2') - P(B_1' \cap B_2')] =$
$= P(A')[P(B_1') + P(B_2') - P(B_1') \cdot P(B_2')] = 0{,}97[0{,}8 + 0{,}8 - 0{,}8 \cdot 0{,}8]$
$= 0{,}97 \cdot (1{,}6 - 0{,}64) = 0{,}9312$

$P(C) = 1 - P(C')$

$P(C) = 1 - 0{,}9312$
$= 0{,}0688$

⑥ Nechť A, B jsou nezávislé jevy.

a) $P(A) = 0{,}4$; $P(A \cup B) = 0{,}7$; určete $P(B)$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B)$
$0{,}7 = 0{,}4 + P(B) - 0{,}4 \cdot P(B)$
$0{,}3 = 0{,}6\, P(B)$
$P(B) = \frac{0{,}3}{0{,}6} = \frac{1}{2}$

b) $P(A) = \frac{1}{5}$; $P(B) = \frac{1}{4}$; určete $P(A \cup B)$

DÚ $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
$= P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B)$
$= \frac{1}{5} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{4+5-1}{20}$
$P(A \cup B) = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}$

c) $P(A) = \frac{1}{5}$; $P(B) = \frac{1}{4}$; určete $P(A' \cup B')$

DÚ $P(A') = 1 - P(A) = \frac{4}{5}$
$P(B') = 1 - P(B) = \frac{3}{4}$
$P(A' \cup B') = P(A') + P(B') - P(A' \cap B') =$
$= P(A') + P(B') - P(A') \cdot P(B') =$
$= \frac{4}{5} + \frac{3}{4} - \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{16+15-12}{20}$
$P(A' \cup B') = \frac{19}{20}$

d) $P(A \cap B) = \frac{1}{6}$; $P(A \cap B') = \frac{1}{3}$; určete $P(A)$, $P(B)$

DÚ $P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{6} \Rightarrow P(A) = \frac{1}{6P(B)}$ (*)
$P(A) \cdot P(B') = \frac{1}{3}$
$\frac{1}{6P(B)}(1 - P(B)) = \frac{1}{3} \quad | \cdot 6P(B)$
$1 - P(B) = 2P(B)$
$1 = 3P(B)$
$P(B) = \frac{1}{3} \quad$ z (*) $P(A) = \frac{1}{6 \cdot \frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$

⑦ Máme rodinu s třemi dětmi, pravděpodobnost narození kluka i dívky uvažujeme stejnou. Určete pravděpodobnosti následujících jevů:

– množ. možných výsledků: Ω = {(k, k, k), (k, k, d), (k, d, k), (d, k, k), (d, d, k), (d, k, d), (k, d, d), (d, d, d)}
$m(\Omega) = 8$

– jev A: nejstarší dítě je kluk A = {(k, k, k), (k, k, d), (k, d, k), (k, d, d)} $P(A) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

– jev B: prostřední dítě je dívka B = {(k, d, k), (d, d, k), (k, d, d), (d, d, d)} $P(B) = \frac{1}{2}$

– jev C: všechny 3 děti jsou kluci C = {(k, k, k)} $P(C) = \frac{1}{8}$

– jev D: pohlaví prvních dvou dětí je stejné D = {(k, k, k), (k, k, d), (d, d, k), (d, d, d)} $P(D) = \frac{1}{2}$

– jev E: třetí dítě se narodí kluk E = {(k, k, k), (k, d, k), (d, k, k), (d, d, k)} $P(E) = \frac{1}{2}$

– jev F: pohlaví prvního a třetího dítěte je stejné F = {(k, k, k), (k, d, k), (d, k, d), (d, d, d)} $P(F) = \frac{1}{2}$

– jev G: pohlaví všech tří dětí je stejné G = {(k, k, k), (d, d, d)} $P(G) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

Určete pravděpodobnost následujících jevů a rozhodněte, zda jevy, z nichž jsou tyto jevy sestaveny, jsou nezávislé:

– jev (A ∩ B): první dítě je kluk a prostřední dívka A ∩ B = {(k, d, k), (k, d, d)}
$P(A \cap B) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$ $P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} = P(A \cap B)$ A, B jevy nezávislé

lze i jinak: přibližně polovina rodin má jako první dítě kluka a z této poloviny pak polovina má jako druhé dítě dívku ⇒ $P(A \cap B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$
(to, že se první narodí kluk, nemá vliv na pohlaví druhého dítěte)

– jev (A ∩ C): první dítě je kluk a všechny tři děti jsou kluci A ∩ C = {(k, k, k)}
$P(A \cap C) = \frac{1}{8}$ $P(A) \cdot P(C) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{16} \neq P(A \cap C)$ A, C nejsou jevy nezávislé
(nemohou se narodit 3 kluci bez toho, aby první byl kluk)

– jev (B ∩ C): prostřední dítě je dívka a všechny 3 děti jsou kluci B ∩ C = ∅
$P(B \cap C) = \frac{0}{8} = 0$ $P(B) \cdot P(C) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{16} \neq P(B \cap C)$ B, C nejsou jevy nezávislé
(když bude prostřední dívka, nikdy už nebudou 3 kluci)

– jev (D ∩ E): pohlaví prvních dvou dětí je stejné a třetí se narodí kluk D ∩ E = {(k, k, k), (d, d, k)}
$P(D \cap E) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$ $P(D) \cdot P(E) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} = P(D \cap E)$ D, E jevy nezávislé

– jev (D ∩ F): pohlaví prvních dvou dětí je stejné a pohlaví prvního a třetího dítěte je stejné
D ∩ F = {(k, k, k), (d, d, d)} $P(D \cap F) = \frac{1}{4}$ $P(D) \cdot P(F) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} = P(D \cap F)$ D, F jevy nezávislé

– jev (D ∩ G): pohlaví prvních dvou dětí je stejné a pohlaví prvního a třetího dítěte je stejné
D ∩ G = {(k, k, k), (d, d, d)} $P(D \cap G) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$ $P(D) \cdot P(G) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8} \neq P(D \cap G)$ D, G nejsou jevy nezávislé

⑧ Na určité škole propadá v průměru 15 % studentů z matematiky, 10 % z fyziky a 5 % z obou předmětů. Jsou jevy „student propadne z matematiky“ a „student propadne z fyziky“ nezávislé?

jev M … propadající studenti z matem. (15%) => $P(M) = 0{,}15$
jev F … propadající studenti z fyziky (10%) => $P(F) = 0{,}10$
jev M ∩ F … propad. studenti z M a F (5%) => $P(M \cap F) = 0{,}05$

? zda jevy M, F nezávislé

$P(M \cap F) = 0{,}05$ $P(M) \cdot P(F) = 0{,}15 \cdot 0{,}10 = 0{,}0150$

$P(M \cap F) \neq P(M) \cdot P(F)$

NEJSOU NEZÁVISLÉ JEVY